

## Sistemi lineari: Esercizi svolti

Risolvere i seguenti sistemi di primo grado utilizzando per ciascuno tutte e tre le tecniche conosciute (sostituzione, riduzione e confronto):

$$1) \begin{cases} x = -17 + 5y \\ y = 5 + x \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} 2(3y - 2x) = -3(2x + 3y) - 10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$
$$3) \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{4}[(x+1)^2 - (y-2)^2] + \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \end{cases}$$

### 1 Esercizio

$$\begin{cases} x = -17 + 5y \\ y = 5 + x \end{cases}$$

Per prima cosa, riportiamo il sistema nella sua *forma canonica* (o *normale*):

$$\begin{cases} x - 5y = -17 \\ -x + y = 5 \end{cases}$$

#### 1.1 Metodo di sostituzione

Decidiamo di esplicitare la  $x$  nella prima equazione e lasciare inalterata la seconda:

$$\begin{cases} x = 5y - 17 \\ -x + y = 5 \end{cases} \qquad (1)$$

A questo punto, operiamo la vera e propria sostituzione:

$$-(5y - 17) + y = 5$$

$$-5y + 17 + y = 5$$

$$-5y + y = 5 - 17$$

$$-4y = -12$$

$$y = 3$$

che va sostituito nella prima equazione della (1):

$$x = 5 \cdot 3 - 17 = 15 - 17 = -2$$

Concludendo:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

## 1.2 Metodo del confronto

A partire dalla forma canonica, decidiamo di esplicitare la  $x$  in entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} x = 5y - 17 \\ -x = -y + 5 \end{cases} \quad (2)$$
$$\begin{cases} x = 5y - 17 \\ x = y - 5 \end{cases}$$

A questo punto, è possibile operare il vero e proprio confronto:

$$5y - 17 = y - 5$$

$$5y - y = 17 - 5$$

$$4y = 12$$

$$y = 3$$

che va sostituito (*indifferentemente!*) in una delle due equazioni della (2):

$$x = 3 - 5 = -2$$

Concludendo:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

### 1.3 Metodo di riduzione

A partire dalla forma canonica, eseguiamo la somma delle due equazioni:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x - 5y = -17 \\ -x + y = 5 \end{array} \right. \\ \hline -4y = -12 \\ y = 3 \end{array}$$

Sempre a partire dalla forma canonica, cerchiamo di eliminare la  $y$ :

$$\begin{array}{l} 5 \cdot \left\{ \begin{array}{l} x - 5y = -17 \\ -x + y = 5 \end{array} \right. \\ \hline \left\{ \begin{array}{l} x - 5y = -17 \\ -5x + 5y = 25 \end{array} \right. \end{array}$$

Ed eseguiamo la somma delle due equazioni:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x - 5y = -17 \\ -5x + 5y = 25 \end{array} \right. \\ \hline -4x = 8 \\ x = -2 \end{array}$$

Concludendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3 \end{array} \right.$$

## 2 Esercizio

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(3y - 2x) = -3(2x + 3y) - 10 \\ 2x - y = 6 \end{array} \right.$$

Prima di tutto, portiamo il sistema nella sua forma canonica:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 6y - 4x = -6x - 9y - 10 \\ 2x - y = 6 \end{array} \right. \\ \hline \left\{ \begin{array}{l} -4x + 6x + 6y + 9y = -10 \\ 2x - y = 6 \end{array} \right. \\ \hline \left\{ \begin{array}{l} 2x + 15y = -10 \\ 2x - y = 6 \end{array} \right. \end{array}$$

## 2.1 Metodo di sostituzione

Conviene esplicitare la  $y$  nella seconda equazione e lasciare inalterata la prima:

$$\begin{cases} 2x + 15y = -10 \\ -y = -2x + 6 \end{cases} \quad (3)$$

A questo punto, operiamo la vera e propria sostituzione:

$$2x + 15(2x - 6) = -10$$

$$2x + 30x - 90 = -10$$

$$32x = 90 - 10$$

$$32x = 80$$

$$x = \frac{80}{32} = \frac{5}{2}$$

che va sostituito nella seconda equazione della (3):

$$y = 2 \cdot \frac{5}{2} - 6 = 5 - 6 = -1$$

Concludendo:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

## 2.2 Metodo del confronto

A partire dalla forma canonica, decidiamo di esplicitare la  $x$  in entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} 2x + 15y = -10 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \quad (4)$$
$$\begin{cases} 2x = -15y - 10 \\ 2x = y + 6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -\frac{15}{2}y - 5 \\ x = \frac{1}{2}y + 3 \end{cases}$$

A questo punto, è possibile operare il vero e proprio confronto:

$$-\frac{15}{2}y - 5 = \frac{1}{2}y + 3$$

$$-\frac{15}{2}y - \frac{1}{2}y = 5 + 3$$

$$-\frac{16}{2}x = 8$$

$$-8y = 8$$

$$y = -1$$

che va sostituito in una delle due equazioni della (4):

$$x = \frac{1}{2} \cdot (-1) + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{-1 + 6}{2} = \frac{5}{2}$$

Concludendo:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

### 2.3 Metodo di riduzione

A partire dalla forma canonica, eseguiamo la differenza delle due equazioni:

$$\begin{cases} 2x + 15y = -10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

---

$$16y = -16$$
$$y = -1$$

Sempre a partire dalla forma canonica, cerchiamo di eliminare la  $y$ :

$$15 \cdot \begin{cases} 2x + 15y = -10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + 15y = -10 \\ 30x - 15y = 90 \end{cases}$$

Ed eseguiamo la somma delle due equazioni:

$$\begin{cases} 2x + 15y = -10 \\ 30x - 15y = 90 \end{cases}$$

---

$$32x = 80$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Concludendo:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

### 3 Esercizio

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{4}[(x+1)^2 - (y-2)^2] + \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \end{cases}$$

Come sempre, trasformiamo il sistema nella sua forma normale:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}[x^2 + 2x + 1 - (y^2 - 4y + 4)] + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}[x^2 + 2x + 1 - y^2 + 4y - 4] + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}[x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3] + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y^2 + y - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Ora, il sistema è pronto per essere risolto con le tre tecniche conosciute. Tuttavia, si invita il lettore – una volta ottenuti i risultati richiesti – a leggere le osservazioni in coda alla risoluzione.

#### 3.1 Metodo di sostituzione

Conviene esplicitare la  $y$  nella seconda equazione e lasciare inalterata la prima:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \end{cases} \quad (5)$$

A questo punto, operiamo la vera e propria sostituzione:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{4+2}{8}x &= \frac{-3-4}{8} \\ 6x &= -7 \\ x &= -\frac{7}{6}\end{aligned}$$

che va sostituito nella seconda equazione della (5):

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) - \frac{3}{4} = \frac{7}{12} - \frac{3}{4} = \frac{7-9}{12} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

Concludendo:

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

### 3.2 Metodo del confronto

A partire dalla forma canonica, decidiamo di esplicitare la  $x$  in entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + y = -\frac{3}{4} \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x = -y - \frac{3}{4} \end{cases} \begin{cases} x = y - 1 \\ x = -2y - \frac{3}{2} \end{cases} \quad (6)$$

A questo punto, è possibile operare il vero e proprio confronto:

$$\begin{aligned}y - 1 &= -2y - \frac{3}{2} \\ y + 2y &= 1 - \frac{3}{2} \\ 3y &= -\frac{1}{2} \\ y &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

che va sostituito in una delle due equazioni della (6):

$$x = -\frac{1}{6} - 1 = -\frac{7}{6}$$

Concludendo:

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

### 3.3 Metodo di riduzione

A partire dalla forma canonica, eseguiamo la differenza delle due equazioni:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + y = -\frac{3}{4} \end{cases} \\ & \hline & -\frac{1}{2}y - y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \\ & \frac{-2 - 4}{4}y = \frac{-2 + 3}{4} \\ & -6y = 1 \\ & y = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Sempre a partire dalla forma canonica, cerchiamo di eliminare la  $y$ :

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + y = -\frac{3}{4} \end{cases} \\ & \begin{cases} x - y = -1 \\ \frac{1}{2}x + y = -\frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Ed eseguiamo la somma delle due equazioni:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - y = -1 \\ \frac{1}{2}x + y = -\frac{3}{4} \end{cases} \\ & \hline & x + \frac{1}{2}x = -1 - \frac{3}{4} \\ & \frac{4 + 2}{4}x = \frac{-4 - 3}{4} \\ & 6x = -7 \\ & x = -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

Concludendo:

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

### 3.4 Osservazione

È importante notare come risolvere quest'ultimo esercizio a partire dalla sua forma canonica così come si è ricavato, è *puro masochismo matematico*.

Infatti, dire:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

equivale a:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + 4y = -3 \end{cases}$$

ottenuto semplicemente moltiplicando tutta la prima equazione per 2 e la seconda per 4.

È indubbio che quest'ultimo sistema risulta più semplice da risolvere, se non altro per i coefficienti di partenza.

Pertanto, il lettore è invitato a meditare sulla necessità di svolgere altri esercizi per acquisire quell'esperienza indispensabile per affrontare questo argomento con maggior consapevolezza e maturità, cercando la strada che di volta in volta appare più congeniale.